Оценка количества правильных конфигураций для количественных отношений.

Д. В. Подрезов email: dimuka0901@mail.ru
В. С Урубков email: urubkov.vs@mail.ru
Н. Е. Балакирев, email: balakirev1949@yandex.ru
М. М. Фадеев email: fadeev_mix@bk.ru

Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)ё

Аннотация. *В статье рассматривается возможность оценки количества возможных конфигураций для вида отношений равно-неравно с учетом числа множеств, участвующих в совокупных отношениях. Рассматривая практические задачи распознавания информационного содержания волн и используя отношения как основу структуризации, возникла необходимость оценки разнообразия таких отношений. Формализация понятия отношений вскрыла целый пласт представителей таких отношений, интерпретация и использование, которых еще впереди. Для данного вида отношений удалось получить оценку количества возможных комбинаций конфигураций поля отношений, зависящих от числа участвующих множеств. Всё это затрагивается в предлагаемом изложении.*

Ключевые слова: *Отношение, отношение равенства, качественный подход, количественный подход, поле отношений, правильные и неправильные матрицы отношений, предопределенность.*

Введение

Широко используемый термин «отношение», к сожалению, сводится лишь к дискретным функциям и некоторым образом связывается с теорией графов. Часть теории отношений исследует общие свойства отношений [1-3]. Если присмотреться внимательно, то отношения возникают там, где присутствует взаимозависимость и влияние одной совокупности отношений на другую сторону, для которой они предопределяют значение такого отношения, не опираясь на значение или характеристики множеств. С другой стороны, существуют совокупности отношений, для которых требуется обращение к значению множества, относительно которого и устанавливаются такие отношения. Именно эти стороны отношений дают возможность обобщить и формализовать понятие отношения в строгих математических рамках и посмотреть на них как на совокупную, полно связанную среду, которая рассматривается нами как поле отношений сообразно физическому полю. И обращаясь к аналогии поля в физике, можно сказать, что поле отношений, по факту, может предопределять правомочность наличия тех или иных элементов в конкретной конфигурации такого поля. Наблюдается эффект запрета определенных значений отношений между определенными множествами, которые не соответствуют правилам определения такого вида отношений. Такие отношения являются противоречивыми и являются не правильными, то есть, не соответствуют правилам сосуществования объектов или объективным законам. В минимальном своем проявлении совокупность двух определенных отношений предопределяет значение третьего отношения, но и не исключает совокупности других сочетаний отношений, отличных от предыдущих, при которых третье отношение может быть установлено только при обращении к элементам множеств.

1. Система отношений.

Отношения необходимо рассматривать в единой «инструментальной» системе, в которой имеются, по крайней мере, пара отношений, например, равенство и не равенство множеств, и они находятся во взаимоисключении к друг к другу. Фактически они составляют базу для распознавания картины, складывающейся между множеством объектов, и обеспечивают классификацию объектов на их основе. Общая картина таких отношений для некоторых отношений предопределена с учетом других определенных совокупных отношений.

Выделив характерный аспект отношения предопределять по совокупности уже определенных отношений отношение между другими объектами, не прибегая к рассмотрению самих объектов, необходимо понимать, что обратной стороной предопределения является отрицание такового. А это означает невозможность других отношений кроме предопределенного. И это не неопределенность, когда её можно в потенциале разрешить, а невозможность такого отношения в принципе. Таким образом, проглядывается система отношений, в которой наблюдаются, условно говоря, следующие состояния

- предопределённости
- неопределенности
- невозможности.

Невозможность очерчивает границу системы отношений извне, предопределяя ограничение количества состояний отношений при фиксированном значении числа рассматриваемых множеств объектов. Более того, как будет показано, наблюдается некоторая закономерность:

число возможных конфигураций отношений относительно всех потенциально возможных не связанных предопределенными отношениями комбинаций уменьшается, а число невозможных комбинаций растет. Если обратиться к бесконечности числа рассматриваемых отношений, то пространство возможных комбинаций «разрывается» на две части:

– сужающееся пространство возможных отношений
– расширяющееся пространство невозможных отношений.

Все отношения, которые складываются между объектами множеств, можно рассматривать как полно связанный граф, в котором ребра графа помечены значениями таких отношений

Но в отличие от графа, в котором присутствует свобода помечать ребра любыми значениями, что означает независимость ребер между собою, мы будем предполагать возможную взаимозависимость значений ребер относительно общей смежной вершины. Таким образом, если рассматривать отношения как полно связанный граф, на ребрах которого проставляются значения отношений из списка возможных, то существуют ребра, значения которых фиксированы за счет определенных значений других смежных ребер (отношений) относительно одной вершины.

Смежность рёбер графа в данном рассмотрении предполагает такие отношения между рёбрами, для которых существует общая вершина, объединяющая их.

Для обозначения отношений будем использовать общепринятый символ «R» с индексами или без них. При этом система отношений, которую будем обозначать символом «S», должна иметь определенный вид отношений, имеющий не менее двух значений отношений или просто отношений, относительно которых будет устанавливаться конфигурация таких отношений.

Например, вид отношений равенства-неравенства, где

$$\mathrm{R}_2^m = \mathrm{R}^1, \mathrm{R}^2 = =, \neq = 1,0 \quad (1)$$

или вид отношений порядка, где

$$\mathrm{R}_3^k = \mathrm{R}^1, \mathrm{R}^2, \mathrm{R}^3 = <, >, = = 1,2,3 \quad (2)$$

Нижний индекс означает количество различаемых отношений в конкретном виде.

Без потери общности, далее вместо термина «элемент множества» мы будем употреблять термин «объект множества», предполагая его включение в систему отношений, в которой он уже элемент этой системы, удовлетворяющей правилам установления определенного вида отношений.

$M = \{A, B, C \dots\}$ – множества разных объектов, где сами объекты обозначаются как $a_i \in A$, $b_i \in B$, $c_i \in C \dots$

Тогда в выражении $(a_i\ R_u^m\ b_j)$, нас будет интересовать R_u^m т.е.

$$a_i\ ?\ b_j \to R_u^m \tag{3}$$

И так если у нас множество объектов, рассматриваемое как система относительно определённого вида отношений, то нас будет интересовать та конфигурация отношений, которая складывается между объектами

$$M = \{a_i\ ?\ b_j, b_j\ ?\ c_k \dots\} \to S = \{R_u^m, R_u^k \dots\} \tag{4}$$

Совокупность $\{M, S\}$ мы будем кратко записывать как $G^p = \{M, S\}$, верхнее «p» будет означать как полносвязанность, так и подчинение набору правил предопределения значений.

И так рассматривая пару объектов относительно определенного вида отношений, мы можем установить значения отношений, исходя из логики содержания такого отношения. При этом такое установление значения не предполагает непосредственных количественных манипуляций, а является качественной стороной установления отношения. Объективность или в нашей терминологии правильность такого отношения определяется объективностью практики распознавания и познания окружающего мира, закрепленной в конкретных терминах отношений и носящих качественный характер оценки совокупной конфигурации рассматриваемых предметов. Отношениями мы вводим систему упорядочивания окружающего мира, не прибегая к количественной мере. Но наряду с этим в такой оценке присутствует взаимозависимость уже множества отношений, которая также является частью содержания конкретного вида отношения. Такое интуитивно воспринимаемое содержание можно выразить, как мы предлагаем, в виде правил.

Набор правил предполагает наличие хотя бы одного варианта смежных значений отношений, которые предопределяют значение отношения для объектов, находящихся на несмежных вершинах таких ребер, но не являющихся общими.

Обозначим знаком $\frac{\text{def}}{=}$ термин «предопределяет». Тогда выражение

$$A \frac{\text{def}}{=} B \tag{5}$$

означает, что значение A в левой части предопределяет значение, которое равно B. Тогда правило P

$$P \Longrightarrow \{R^i, \& \dots \& R^j\} \frac{\text{def}}{=} R^k \tag{6}$$

– это предопределенное и однозначное значение R^k с учетом определенной совокупности $R^i, \& \ldots \& R^j$

Таким образом, мы имеем систему $S = \; G^p, P$, состоящую из множества конфигураций, которые будем обозначать маленькими буквами $s_1, s_2 \ldots s_m$ при фиксированном количестве объектов и определенном наборе правил, которым подчиняется рассматриваемый вид отношения.

Указанные конфигурации можно представить в виде матрицы отношений, в которой в клетках матрицы будет указываться значение отношения, установленного между конкретными рассматриваемыми объектами.

$M_1, \ldots, M_n$ – правильные матрицы,

$N_1, \ldots, N_n$ – противоречивые матрицы.

Далее нас будет интересовать какое количество конфигураций s_m допустимо с учетом количества рассматриваемых объектов и для вполне конкретных отношений равно не равно $=, \neq$.

2. Краткое определение формальной системы отношений равенства-неравенства $\mathbf{G^p = \; O, R, P}$

Определим систему $G_2^p = \; O, R, P$, как совокупность объектов O, списка отношений R, аксиом и правил формирования значений отношений следующим образом P:

– Объекты $O = \; a_i \in A, b_j \in B, c_k \in C \ldots$
– Список отношений $R_2^m = \; R^1, R^2 \; = \; =, \neq \; = \; 1{,}0$
– Аксиомы и правила P

1. Первичные аксиомы

Аксиома 1.

$$R^1 = 0, \text{если } a_i = b_j \tag{7}$$

Аксиома 2.

$$R^2 = 1, \text{если } a_i \neq b_j \tag{8}$$

Аксиома 3.

$$\forall a_i \forall b_j \exists R^m \quad a_i\, R^m\, b_j \;\&\; \; a_i\, R^m\, b_j \; \Rightarrow \text{истина} \tag{9}$$

2. Основополагающие правила для S системы

Правило 1

$$\begin{gathered} \forall a_i \forall b_j \forall c_k \exists R^m \exists R^n \quad a_i\, R^m\, b_j \;\&\; b_j\, R^n\, c_k \;\&\; R^m = R^n = 1 \\ \Rightarrow \quad R^m, R^n \; \overset{\text{def}}{=} R^p = 1 \;\; \& \; a_i\, R^p\, c_k \end{gathered} \tag{10}$$

Правило 2

$$\forall a_i \forall b_j \forall c_k \exists R^m \exists R^n \quad a_i\, R^m\, b_j \;\&\; b_j\, R^n\, c_k \;\&\; R^m \neq R^n$$
$$\Rightarrow \quad R^m, R^n \;\stackrel{\text{def}}{=}\; R^p = 0 \;\;\&\; a_i\, R^p\, c_k \tag{11}$$

Правило 3

$$\forall a_i \forall b_j \forall c_k \exists R^m \exists R^n \quad a_i\, R^m\, b_j \;\&\; b_j\, R^n\, c_k \;\&\; R^m = R^n = 0$$
$$\Rightarrow \; a_i\, R^p\, c_k \;\&\; \; R^p = 0 \;\vee\; R^p = 1 \tag{12}$$

Отсюда система $G^p = \; O, R, P$ может отображать множество O в множество конфигураций S на основе аксиом и правил P

$$O = \; a_i\, ?\, b_j, b_j\, ?\, c_k \ldots \;\; \longrightarrow S = \; R_u^m, R_u^k \ldots \tag{13}$$

Тогда для этой системы $O = \; a_i\, ?\, b_j, b_j\, ?\, c_k \ldots \;\; \longrightarrow S = \; R_2^m, R_2^l \ldots$ максимально число возможных конфигураций будет равно $S = \; s_1, s_2, \ldots s_k \;\; = N_n^2$ определяемая по полученной итерационной формуле, где n число объектов, для которых определяются отношения.

3. Дерево матриц отношений равенства-неравенства.

Общий алгоритм составления матриц отношений заключается в последовательном добавлении новых множеств к уже составленным матрицам отношений.

В самом начале рассмотрению подлежат простейший вариант отношений для двух множеств A и B. Как показано на рисунке 1, существует лишь 2 возможные матрицы отношений, являющиеся правильными.

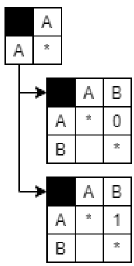

Рис. 1. Матрицы отношений множеств A и B.

При добавлении нового множества C рассматриваются оба варианта отношений A и B отдельно друг от друга. На рисунке 2 продемонстрированы все варианты отношений в обоих случаях.

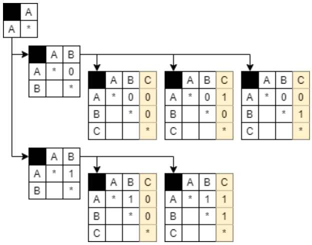

Рис. 2. Матрицы отношений множеств A, B и C.

Далее последовательно добавляются новые множества в систему отношений и путём перебора всех правильных вариантов матриц строится дерево матриц отношений. Пример такого дерева для 5 множеств изображён на рисунке 3.

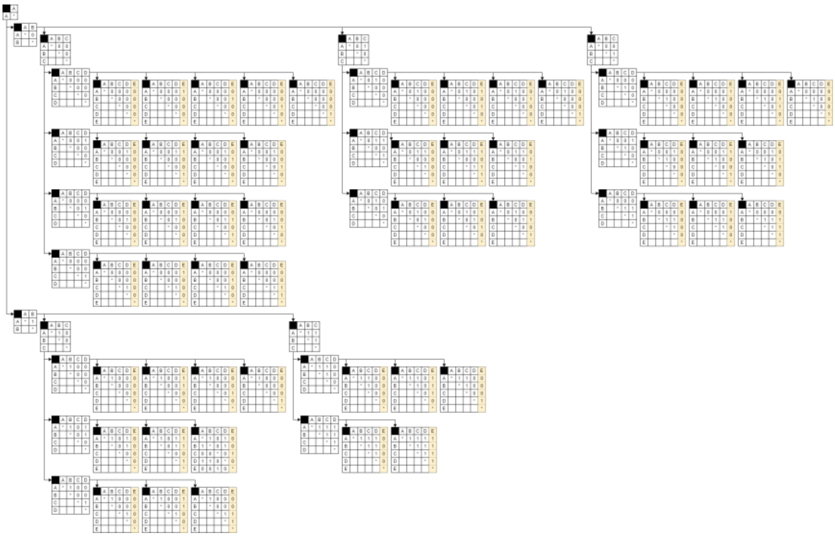

Рис. 3. Матрицы отношений множеств A, B, C, D и E.

4. Выделение составных частей выражений для подсчёта количества правильных конфигураций матриц отношений равенства-неравенства.

Вернёмся к рассмотрению отношения двух множеств: A и B. Для них, как было указано ранее, существует только 2 правильных варианта матрицы. Выражение в этом случае состоит лишь из одного числа:

$$2 \tag{14}$$

С добавлением множества С число правильных матриц возрастает до 5. Из рисунка 2 можно заметить, что дерево правильных матриц делится на 2 ветки, в одной из которых описаны 3 варианта правильных матриц, а в другой 2. Запишем это в выражение:

$$5 = 3 + 2 \tag{15}$$

Составляя выражения для последующих вариантов дерева матриц отношений отбираются только «листья» рассматриваемого дерева и группируются по «ветвям». Например, как следует из рисунка 3, для 5-ти множеств общее число правильных матриц 52 раскладывается в выражение:

$$52 = 5 + 4 * 3 + \ 4 + 3 * 2 \ \ * 2 + 4 + 3 * 2 + 3 + 2 \tag{16}$$

При добавлении нового множества в связку отношений других каждый член из предыдущего выражения в новом преобразуется согласно формуле $a \rightarrow \ a + 1 \ + a * b$, где $b = a - 1$ и является множителем члена выражения, который сохраняется в каждом следующем выражении без изменений.

Следуя этому утверждению и выражению 16, построим выражение, которое должно получиться при добавлении шестого множества в отношение пяти:

$$\begin{aligned}203 = 6 + 5 * 4 + (5 + 4 * 3) * 3 + (5 + 4 * 3 + (4 + 3 \\ * 2) * 2) * 2 + 5 + 4 * 3 + (4 + 3 * 2) * 2 \\ + 4 + 3 * 2 + 3 + 2\end{aligned} \tag{17}$$

Число 203 совпадает с числом правильных матриц, полученных перебором всех вариантов и выделения среди них правильных.

5. Оценка количества правильных конфигураций матриц конфигураций отношений равенства-неравенства

В итоге мы получаем итерационную формулу следующего вида для подсчёта количества правильных конфигураций, которую обозначим как N_n^2

$$a_m^n = a_{m-1}^{n-1} + m * a_m^{n-1} \tag{18}$$

$$N_n^2 = a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n \tag{19}$$

a_m^n – это элемент в n строке и m столбце. Нумерация столбцов идет слева направо. Ниже на рисунке 4 приведена таблица таких коэффициентов и получены численные значения N_n^2 для n = от 1 до 11. В последнем столбце приведена величина возможных комбинаций, если бы отношения не были взаимосвязаны и не подчинялись введенным формальным правилам. Если сравнить число правильных и неправильных матриц, то из таблицы очевидно, что число правильных матриц растет медленнее, чем число неправильных матриц и это может наводить на достаточно глубокие философские мысли.

m/n	$\left\{{m \atop 1}\right\}$	$\left\{{m \atop 2}\right\}$	$\left\{{m \atop 3}\right\}$	$\left\{{m \atop 4}\right\}$	$\left\{{m \atop 5}\right\}$	$\left\{{m \atop 6}\right\}$	$\left\{{m \atop 7}\right\}$	$\left\{{m \atop 8}\right\}$	$\left\{{m \atop 9}\right\}$	$\left\{{m \atop 10}\right\}$	$\left\{{m \atop 11}\right\}$	$N^2{}_n$	$2^{n(n+1)/2}$
1	0											0	2^0
2	1	1										2	2^1
3	1	3	1									5	2^3
4	1	7	6	1								15	2^6
5	1	15	25	10	1							52	2^{10}
6	1	31	90	65	15	1						203	2^{15}
7	1	63	301	350	140	21	1					877	2^{21}
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1				4140	2^{28}
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1			21147	2^{36}
10	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1		115975	2^{45}
11	1	1023	28501	145750	246730	179487	63987	11880	1155	55	1	678570	2^{55}

Рис. 4. Коэффициенты суммируемой последовательности для отношений = ≠.

Заключение

К главному итогу к вышесказанному следует отнести формулировку алгоритма, который позволил определить итерационную формулу получения количества правильных конфигураций для формализованного понятия системы отношений «равно-неравно», определенной на аксиоматической основе. Нами уже установлено, что под подобное формализованное определение подпадает множество видов отношений, и, соответственно, можно и нужно получить подобные оценки для других известных видов отношений. Особенно это актуально для системы установления порядка (<, >, =) так как она используется для структуризации амплитуд звукового потока[5]. Оценка количества конфигураций дает возможность определить набор правильных фигур, которые определяют отношения между так называемыми характерными точками при заданном их количестве. Фактически это основа языка описания более обобщенного, но в то же время более конкретного для различных волн без относительно их количественных характеристик на так называемой качественной основе [4,5]. Использование качественного подхода на основе отношений дает возможность решить множество задач как в технической, так и в гуманитарной сфере.

Список литературы

1. Бирюков Б.В. Логика отношений // Новая философская энциклопедия. Том 2.М., 2001. С. 420-421;

2. Шрейдер Ю.А., Бирюков Б.В. Категория отношения и ее когнитивные аспекты. // Вестник Московского университета. Серия 7. Философия. №3, 2002 С.98
3. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. – М., Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1971, 256 с
4. Балакирев Н.Е. Количественная и качественная оценка исследуемых объектов на примере простейших отношений. Вестник ВГУ, серия: Системный анализ и информационные технологии, 2016, №2. Стр. 70-77
5. Балакирев Н.Е., Нгуен Хоанг Зуй, М.А. Малков Фадеев М.М. Структуризация и качественное рассмотрение звукового потока в системе синтеза и анализа речи Программные продукты и системы / Программные продукты и системы. 2018. № 4 (31). С. 768-776